

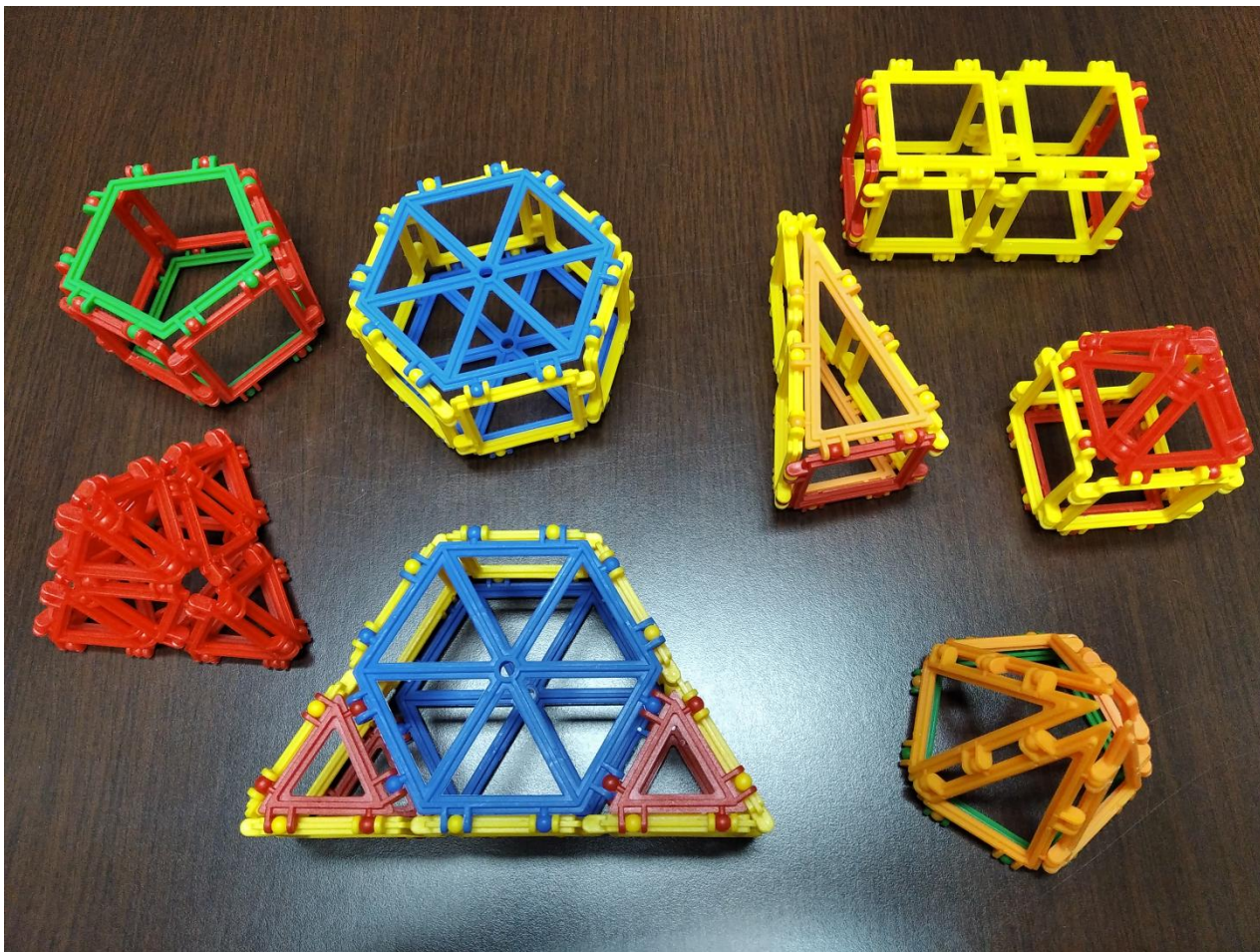
dr Elżbieta Kalinowska

Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski



Figury przestrzenne

# Bryły z klocków reko



A

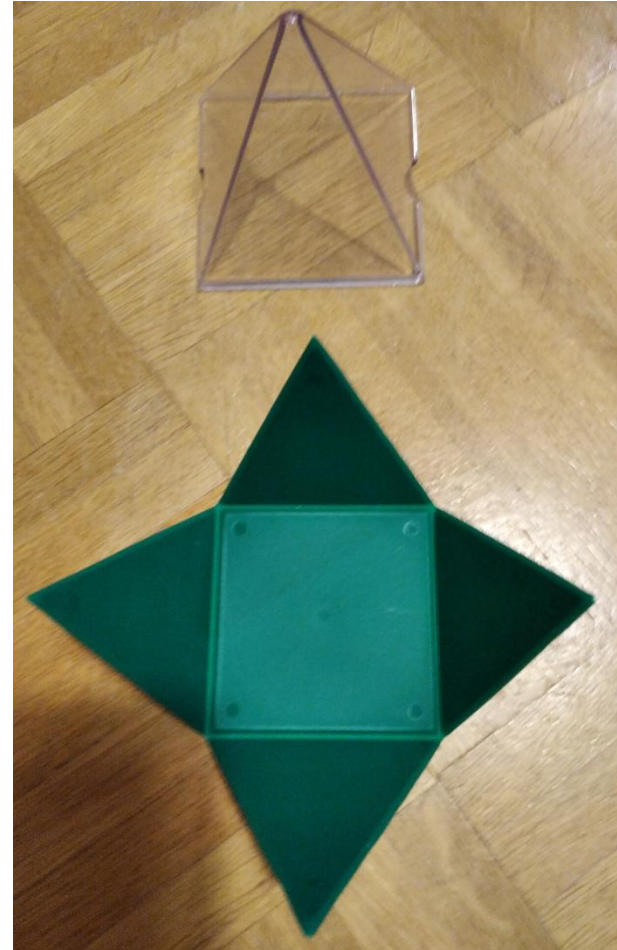
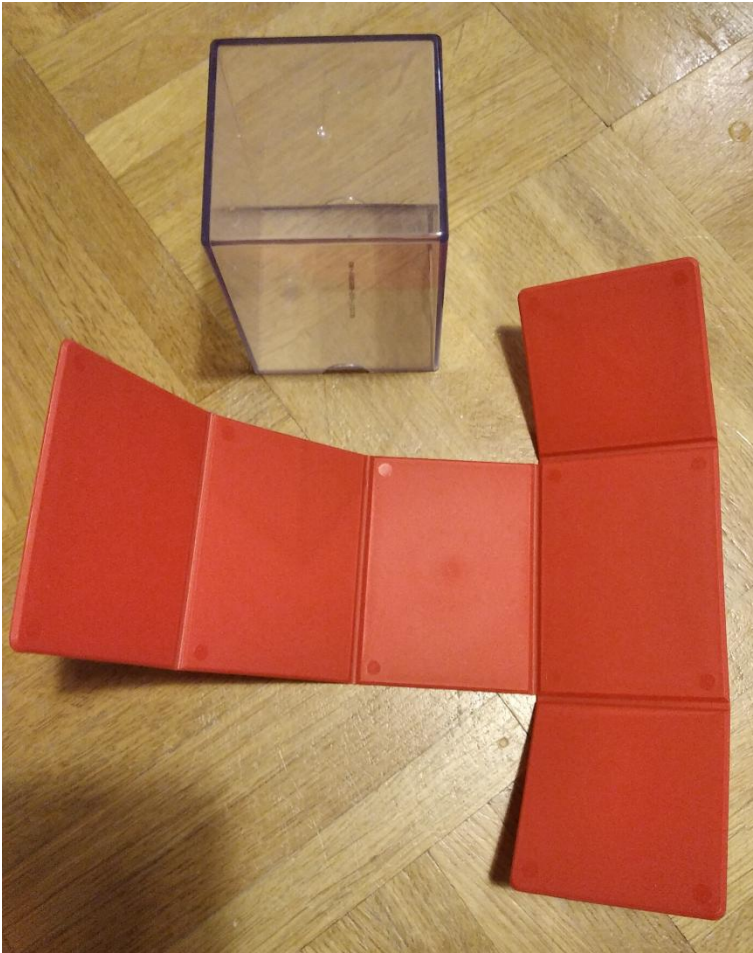
B

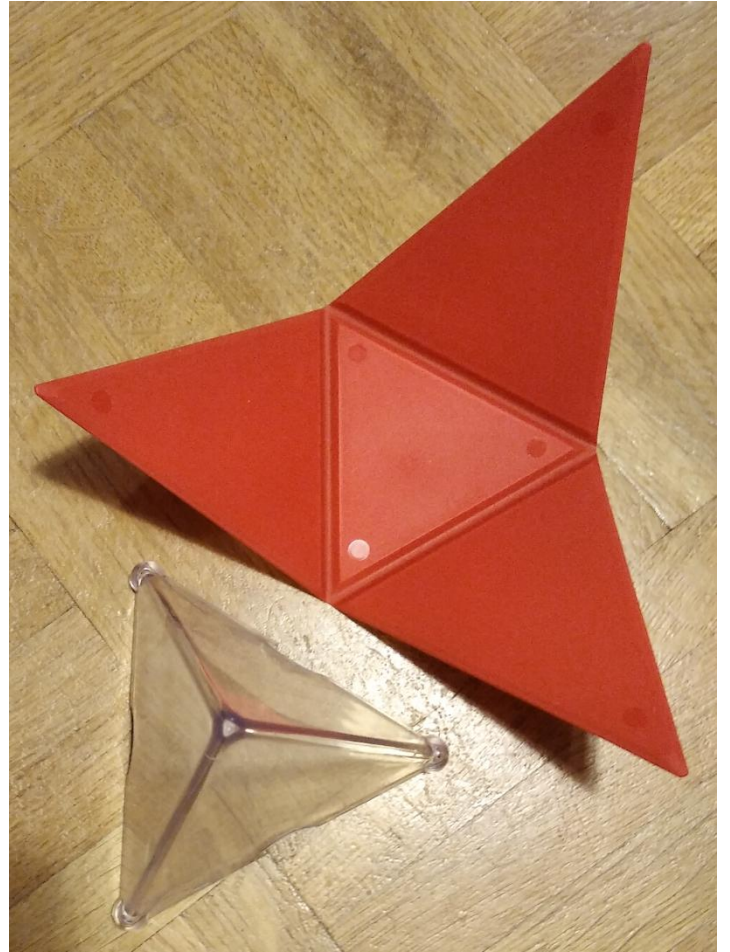
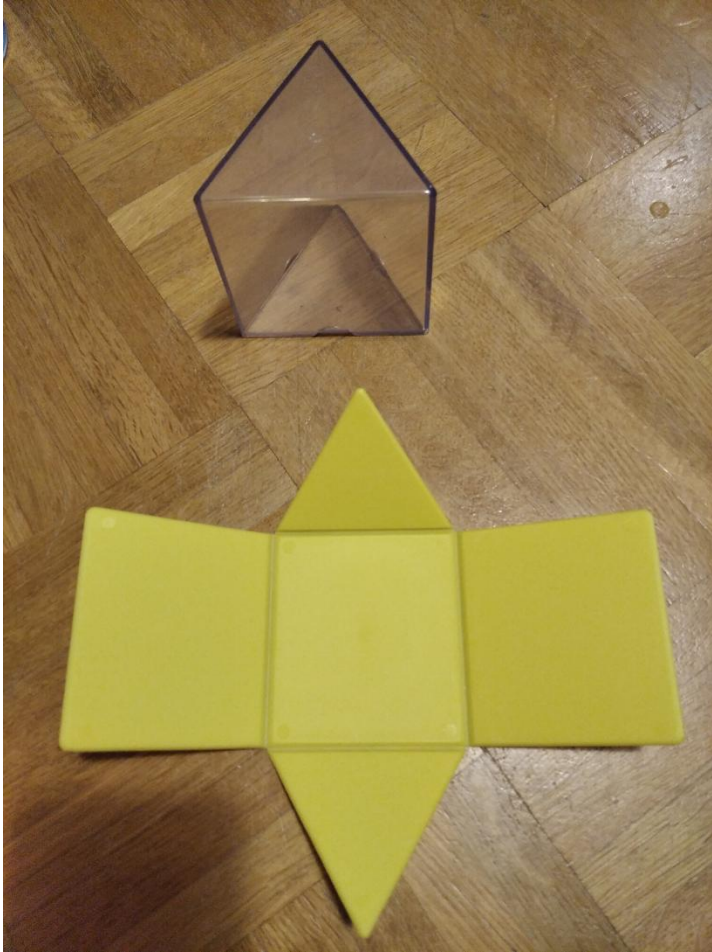
C

# Bryły z siatkami



Siatki brył można wyjąć i rozprostować





# 2a

## Rozpoznawanie brył

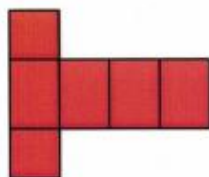
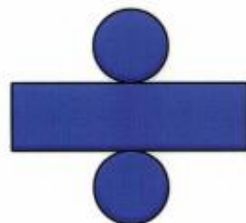
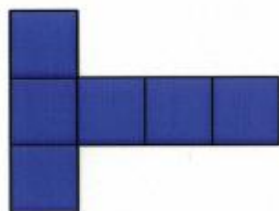
Do tego ćwiczenia wykorzystaj bryły i ich siatki.

Znajdź i dopasuj bryły do poniższych rysunków. Podaj nazwę każdej z nich i umieść właściwy model na odpowiadającej mu fotografii.



## 2b Dopasuj

Rozłóż siatkę każdej z brył, a następnie ją złoż. Dopasuj rysunek siatki do odpowiadającej mu nazwy.



ostrosłup prawidłowy trójkątny

sześcian

walec

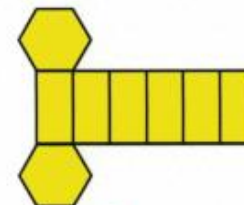
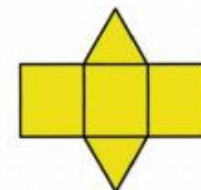
graniastosłup prawidłowy sześciokątny

stożek

graniastosłup prawidłowy trójkątny

prostopadłościan

ostrosłup prawidłowy czworokątny



## 4a

# Zagadki o bryłach

Przeczytaj poniższe zagadki. Spróbuj je rozwiązać, używając do pomocy brył i ich siatek.

**Zagadka nr 1**

- Moje ściany boczne to wielokąty.
- Moja podstawa ma kształt sześciokąta.
- Mam 12 wierzchołków.

Jaką bryłą jestem?

**Zagadka nr 3**

- Moje ściany boczne to wielokąty.
- Mam 6 ścian.
- Mam 12 krawędzi tej samej długości.

Jaką bryłą jestem?

**Zagadka nr 2**

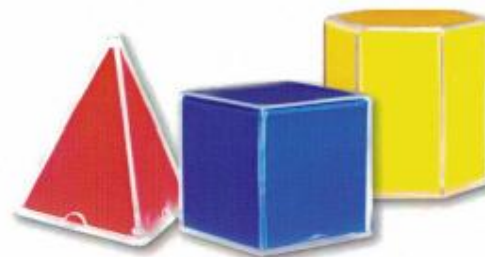
- Mam 4 ściany.
- Moja podstawa ma kształt trójkąta.
- Moje 3 ściany boczne to trójkąty.

Jaką bryłą jestem?

**Zagadka nr 4**

- Mam 9 krawędzi.
- Mam 5 ścian.
- Dwie z moich ścian są trójkątami.

Jaką bryłą jestem?



## 4b

# Zagadki o bryłach

Przeczytaj poniższe zagadki. Spróbuj je rozwiązać, używając do pomocy brył i ich siatek.

### Zagadka nr 1

- Mam 1 podstawę.
- Moja podstawa ma kształt koła.
- Moja powierzchnia boczna jest wycinkiem koła.

Jaką bryłą jestem?

### Zagadka nr 3

- Mam 6 ścian.
- Mam 12 krawędzi.
- Moje krawędzie są różnej długości.

Jaką bryłą jestem?

### Zagadka nr 2

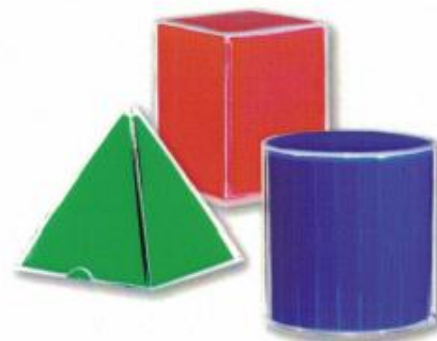
- Mam 2 podstawy i 1 powierzchnię boczną.
- Nie mam wierzchołków.
- Moja podstawa ma kształt koła.

Jaką bryłą jestem?

### Zagadka nr 4

- Moja podstawa ma kształt kwadratu.
- Mam 5 ścian.
- Cztery z moich ścian to trójkąty.

Jaką bryłą jestem?



Przeczytaj poniższe zagadki i uzupełnij brakujące wyrazy. Następnie przeczytaj je jeszcze raz, aby sprawdzić, czy wszystko ma sens. Odnajdź opisywaną w zagadce bryłę.

.....

Uzupełnij.

1. Moją \_\_\_\_\_ jest kwadrat. Mam \_\_\_\_\_ ścian. Moje pozostałe 4 ściany to trójkąty.

Jestem \_\_\_\_\_.

2. Mam 6 \_\_\_\_\_. Wszystkie ściany są tej samej \_\_\_\_\_. Mam 12 krawędzi, które są sobie równe.

Jestem \_\_\_\_\_.

3. Mam dwie podstawy. Moja \_\_\_\_\_ ma kształt sześciokąta. Mam 18 \_\_\_\_\_.

Jestem \_\_\_\_\_.

4. Mam 9 krawędzi. Mam \_\_\_\_\_ ścian. Dwie ściany to \_\_\_\_\_ a \_\_\_\_\_ ściany to prostokąty.

Jestem \_\_\_\_\_.

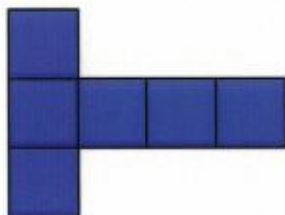
## 5b

# Napisz zagadkę

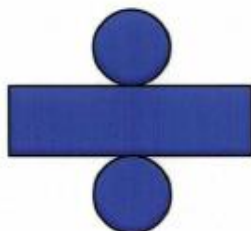
Do tego ćwiczenia potrzebować będziesz kartki papieru i czegoś do pisania.

Teraz twoja kolej na tworzenie zagadek! Spójrz na rysunki siatek poniżej. Dla każdej siatki stwórz zagadkę podobną do tych na kartach 4a i 4b. Przeczytaj swoje zagadki koledze i zobacz, czy będzie on w stanie je rozwiązać.

siatka sześcianu



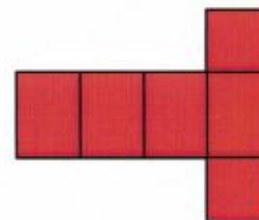
siatka walca



siatka ostrosłupa  
prawidłowego trójkątnego



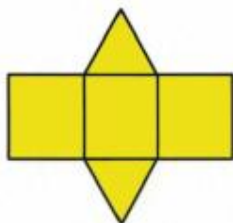
siatka prostopadłościanu



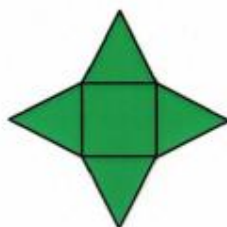
# 10a Nazywanie siatek

Siatki jakich brył przedstawione zostały poniżej?

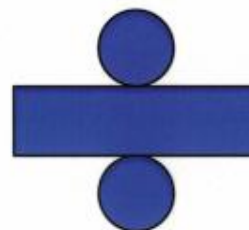
1.



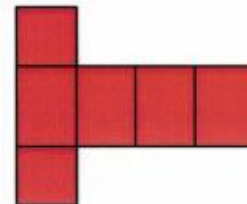
2.



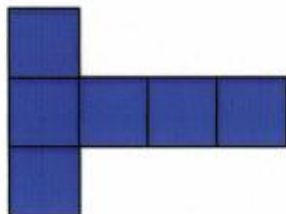
3.



4.



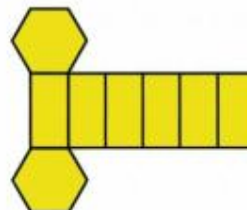
5.



6.



7.

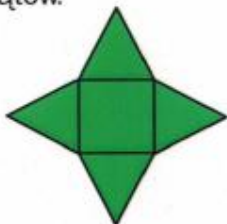


8.

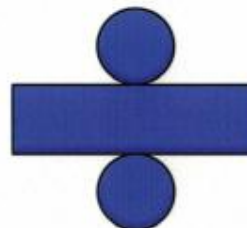


Przy każdym z poniższych obrazków uzupełnij zdania odpowiednimi liczbami. Do pomocy możesz wykorzystać przedstawione na obrazkach siatki.

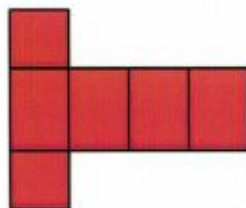
1. Siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego składa się z \_\_\_\_ kwadratu i \_\_\_\_ trójkątów.



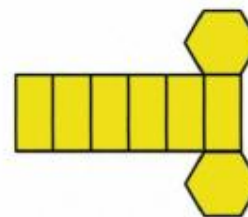
2. Siatka walca składa się z \_\_\_\_ kół i \_\_\_\_ prostokąta



3. Siatka prostopadłościanu składa się z \_\_\_\_ prostokątów i \_\_\_\_ kwadratów.



4. Siatka graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego składa się z \_\_\_\_ prostokątów i \_\_\_\_ sześciokątów.



# 14a Tajemne kody

Obok znajduje się tajemny kod przedstawiający graniastoslup trójkątny: Pokazuje on, że bryła ta składa się z 3 prostokątów i 2 trójkątów.



Poniżej przedstawione zostały inne tajemne kody. Przyjrzyj się im i postaraj się odgadnąć, jaka bryła skrywa się za każdym kodem. Kiedy będziesz znał odpowiedź, poszukaj danej bryły w zestawie.



## 14b Tajemne kody

Obok znajduje się tajemny kod przedstawiający stożek:  
Pokazuje on, że bryła ta składa się z 1 koła i 1 wycinka koła.

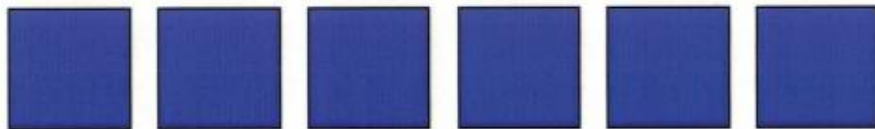


Poniżej przedstawione zostały inne tajemne kody. Przyjrzyj się im i postaraj się odgadnąć, jaka bryła skrywa się za każdym kodem. Kiedy będziesz znał odpowiedź, poszukaj danej bryły w zestawie.

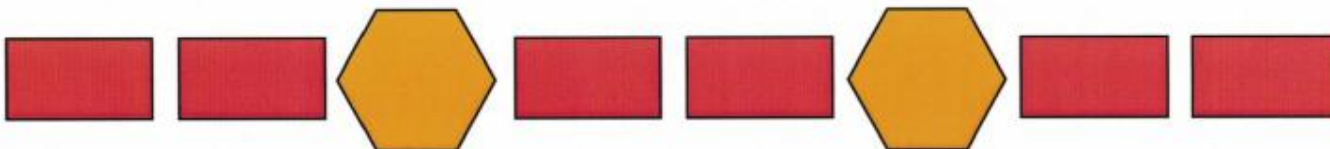
1.



2.



3.



## 15a

## Ściany, podstawy i krawędzie

Ostrosłupy i graniastoslupy posiadają ściany, podstawy i krawędzie, które są wskazane na rysunku.



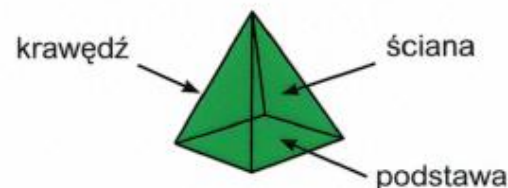
Do ćwiczenia użyj dwóch brył w kolorze niebieskim i dwóch w kolorze zielonym. Przyjrzyj się im uważnie i wypełnij poniższą tabelkę. Aby ułatwić tobie zadanie, informacje o jednej z brył zostały już umieszczone w odpowiednich miejscach. Nazwy poszczególnych brył umieść w górnym wierszu tabeli.

| Nazwa bryły | sześcian |  |  |  |
|-------------|----------|--|--|--|
| ściany      | 6        |  |  |  |
| krawędzie   | 12       |  |  |  |
| podstawa    | kwadrat  |  |  |  |

## 15b

## Ściany, podstawy i krawędzie

Ostrosłupy i graniastosłupy posiadają ściany, podstawy i krawędzie, które są wskazane na rysunku.

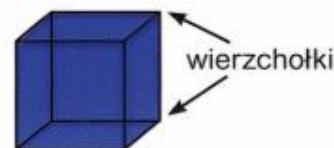


Do ćwiczenia użyj dwóch brył w kolorze czerwonym i dwóch w kolorze żółtym. Przyjrzyj się im uważnie i wypełnij poniższą tabelkę. Aby ułatwić Tobie zadanie, informacje o jednej z brył zostały już umieszczone w odpowiednich miejscach. Nazwy poszczególnych brył umieść w górnym wierszu tabeli.

| nazwa bryły | ostrosłup<br>prawidłowy<br>trójkątny |  |  |  |
|-------------|--------------------------------------|--|--|--|
| ściany      | 4                                    |  |  |  |
| krawędzie   | 6                                    |  |  |  |
| podstawa    | trójkąt                              |  |  |  |

# 16a Ile wierzchołków?

Miejsca zaznaczone na rysunku nazywamy **wierzchołkami**.

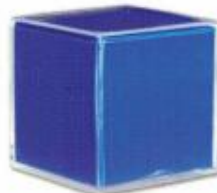


Przyjrzyj się poniższym bryłom i podaj, ile mają wierzchołków. Do pomocy możesz wykorzystać bryły z zestawu.

1.



2.



3.



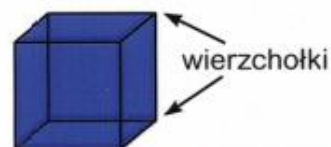
4.



**Pytanie dodatkowe:** Która z powyższych brył ma najwięcej wierzchołków?

# 16b Ile wierzchołków?

Miejsca zaznaczone na rysunku nazywamy **wierzchołkami**.



Przyjrzyj się poniższym bryłom i podaj się, ile mają wierzchołków. Do pomocy możesz wykorzystać bryły z zestawu.

1.



2.



3.



4.



**Pytanie dodatkowe:** Która z powyższych brył ma najwięcej wierzchołków?



# 17a Tabelka SWK

Uzupełnij poniższą tabelkę w oparciu o modele brył z zestawu.  
Podaj, ile ścian, wierzchołków i krawędzi mają podane bryły.

| nazwa bryły                           | ściany (S) | wierzchołki (W) | krawędzie (K) |
|---------------------------------------|------------|-----------------|---------------|
| sześcian                              |            |                 |               |
| ostrosłup prawidłowy trójkątny        |            |                 |               |
| ostrosłup prawidłowy czworokątny      |            |                 |               |
| graniastosłup prawidłowy sześciokątny |            |                 |               |
| graniastosłup prawidłowy trójkątny    |            |                 |               |
| prostopadłościan                      |            |                 |               |

## 17b

# Twierdzenie Eulera o wielościanach

$$(S + W = K + 2)$$

Twierdzenie Eulera: liczba ścian + liczba wierzchołków = liczba krawędzi + 2

**Przykład:** dla ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

4 (ściany) + 4 (wierzchołki) = 6 (krawędzie) + 2

$$4 + 4 = 6 + 2$$

$$8 = 8$$



Twierdzenie Eulera jest unikatową formą obserwacji zależności ścian, wierzchołków i krawędzi brył. Uzupełnij poniższą tabelkę i wykorzystując powyższy wzór sprawdź, czy uda się tobie zastosować twierdzenie Eulera dla brył z naszego zestawu.

| nazwa bryły                           | ściany (S) | wierzchołki (W) | krawędzie (K) | $S + W = K + 2$ |
|---------------------------------------|------------|-----------------|---------------|-----------------|
| sześcian                              |            |                 |               |                 |
| ostrosłup prawidłowy trójkątny        |            |                 |               |                 |
| ostrosłup prawidłowy czworokątny      |            |                 |               |                 |
| graniastosłup prawidłowy sześciokątny |            |                 |               |                 |
| graniastosłup prawidłowy trójkątny    |            |                 |               |                 |
| prostopadłościan                      |            |                 |               |                 |

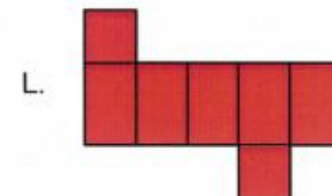
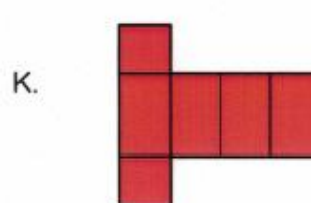
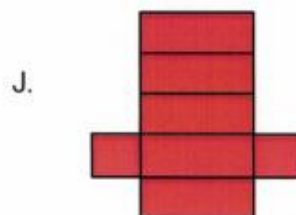
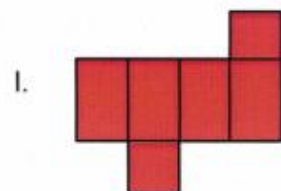
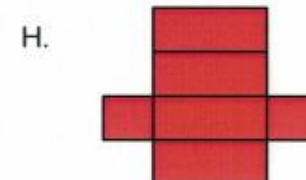
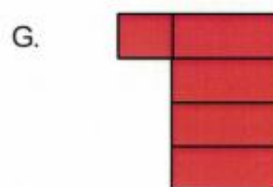
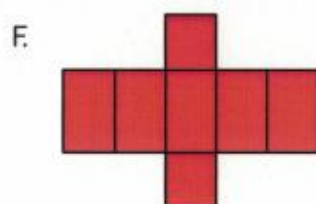
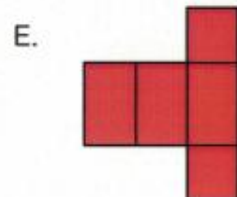
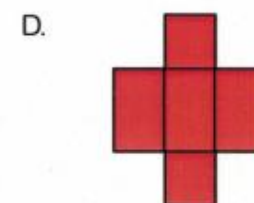
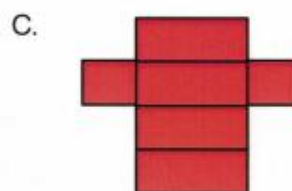
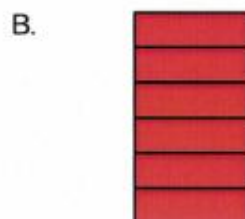
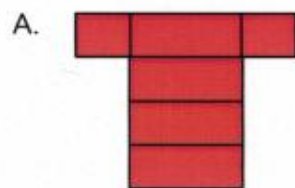
Po lewej portret Eulera z Galerii matematyków Tomasza Brody, do obejrzenia w Instytucie Matematycznym UWr



18a

# Czy złożysz prostopadłościan?

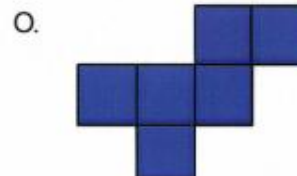
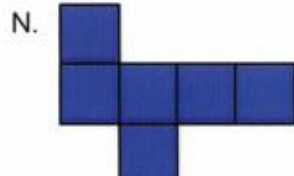
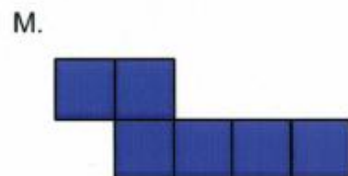
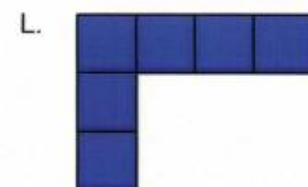
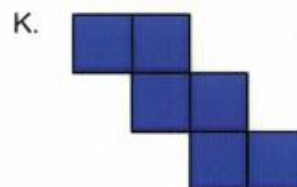
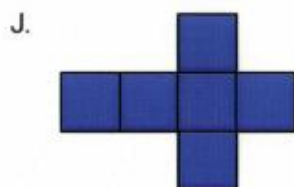
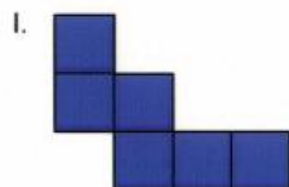
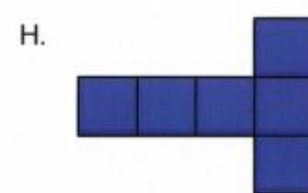
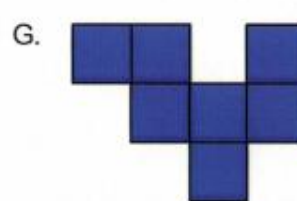
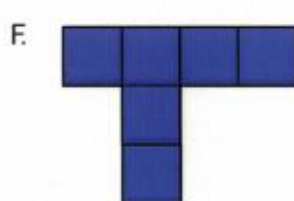
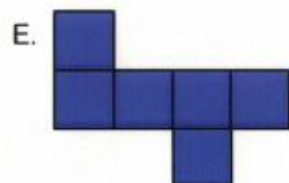
Które z poniższych siatek stworzą po złożeniu prostopadłościan?



18b

# Czy złożysz sześciian?

Które z poniższych siatek stworzą po złożeniu sześciian?



# Zestaw brył z wyjmowanymi podstawami



# Materiał sypki

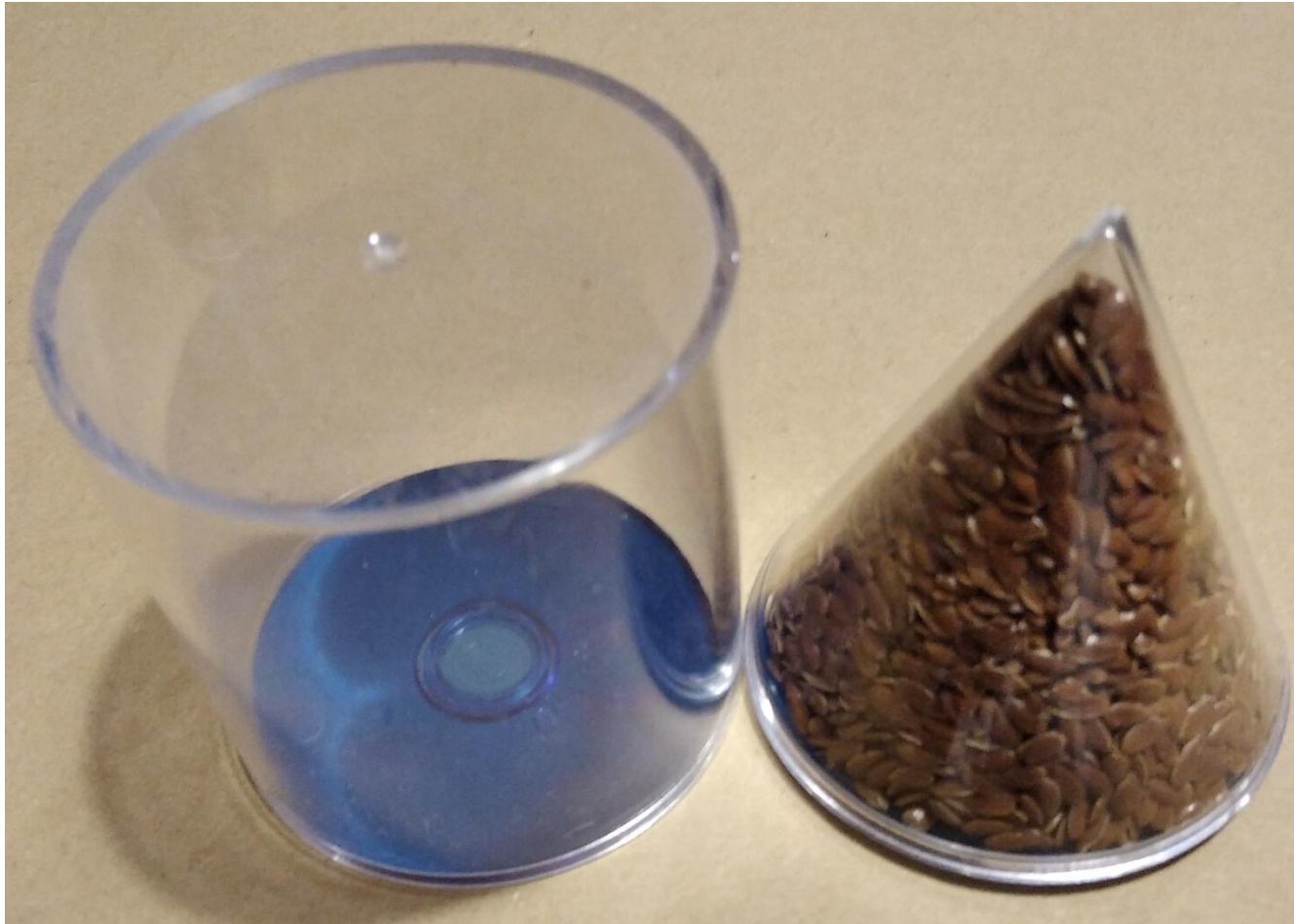


Wypełniamy stożek

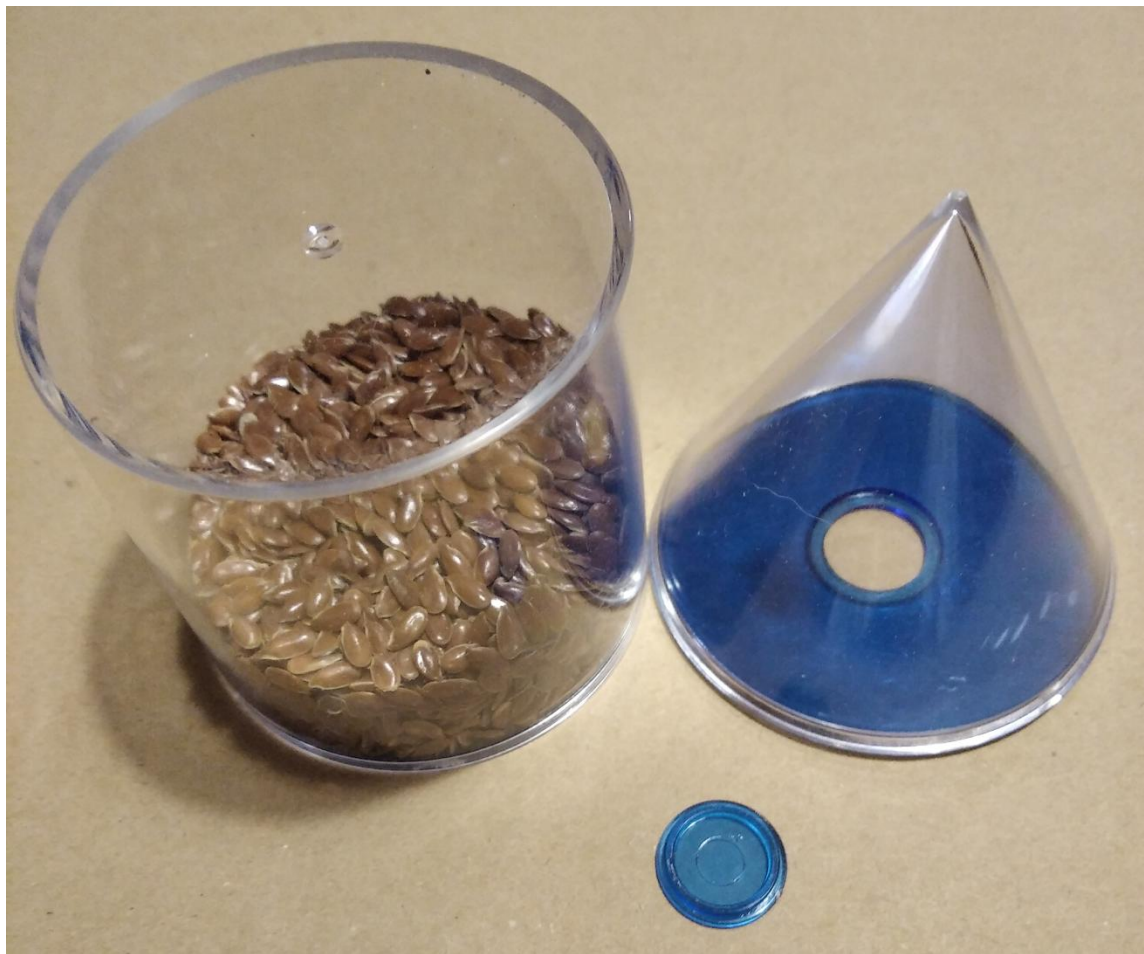




Przesypujemy zawartość stożka  
do walca  
o tej samej średnicy i tej samej wysokości



# Czego się spodziewamy?



Ile razy trzeba ziarna  
przesypać ze stożka do walca,  
aby go wypełnić?

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$V = \pi r^2 H$$





# Na oko $1/3$ ?



Przesypmy to do kuli.

Czego możemy się spodziewać?





$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \quad \text{jeśli } H=r \quad V = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V = \pi r^2 H \quad \text{jeśli } H=r \quad V = \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



# Przesypujemy do kuli



Półowa





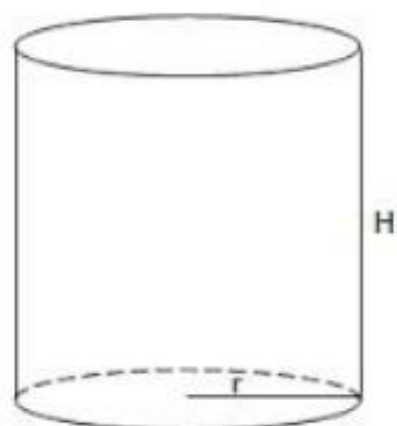
Jaka jest wysokość walca i stożka?

Co by było, gdyby  
wysokość walca i stożka  
była równa  $r$ ?



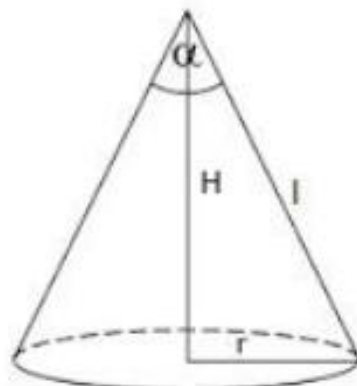


WALEC



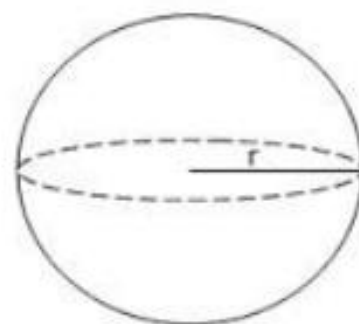
$$V = \pi r^2 H$$

STOŻEK



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

KULA



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

